

Kansrekening 2003/2004

Tentamen, in totaal 5 opgaven

30 juni 2004; 13:00 – 16:00

- **Opgave 1.** Gegeven zijn twee vazen met elk 3 ballen. De eerste vaas bevat 2 rode ballen en 1 witte bal, de tweede vaas bevat 1 rode en 2 witte ballen. Je kiest nu eerst aselekt (dwz. met kans $1/2$) één van de vazen, en vervolgens trek je 5 keer met teruglegging uit deze vaas.
 - (a) Bepaal de kans dat je k rode ballen trekt ($k = 0, 1, \dots, 5$).
 - (b) Bepaal de conditionele kans dat je uit de eerste vaas hebt getrokken, gegeven dat alle 5 getrokken ballen rood zijn.
- **Opgave 2.** Stel dat X en Y onafhankelijke stochasten zijn, beide Gamma(λ)-verdeeld. We definiëren $Z := Y - X$. Bepaal de verdelingsfunctie en de kansdichtheid van Z . Bepaal ook de verwachtingswaarde en de variantie van Z .
- **Opgave 3.**

- (a) Toon aan

$$\sum_{j=\text{even}} \binom{r}{j} x^j y^{r-j} = \frac{1}{2} [(x+y)^r + (y-x)^r]$$

(hierbij $r \in \mathbb{N}_0$, en met “ $\sum_{j=\text{even}}$ ” bedoelen wij dat gesommeerd wordt over alle $j = 2i$, $i \in \mathbb{N}_0$).

- (b) We bekijken een eenvoudig “diffusie-model”. Er zijn twee vazen gegeven, vaas I bevat n rode ballen, vaas II bevat n witte ballen. Er vinden “uitwisselingen” plaats, onder zo’n uitwisseling verstaan we: er wordt aselekt een bal uit vaas I en een bal uit vaas II gekozen, en vervolgens doen we de uit vaas I gekozen bal in vaas II en de uit vaas II gekozen bal in vaas I. Toon aan dat na k “uitwisselingen” de verwachtingswaarde van het aantal rode ballen in vaas I gelijk is aan

$$\frac{n}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{2}{n} \right)^k \right].$$

[aanwijzing: als rode bal nr. i zich uiteindelijk in vaas I bevindt, wat kun je dan zeggen over het aantal malen dat deze bal “uitgewisseld” is?]

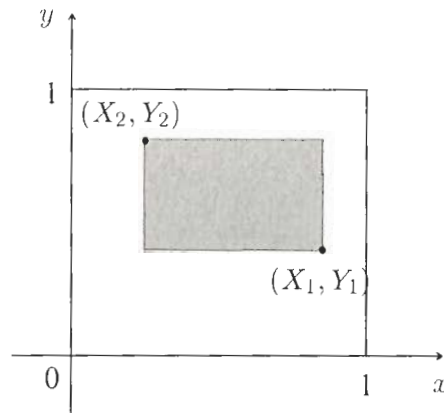


Figure 1: Eenheidsvierkant.

• **Opgave 4.**

- (a) Stel dat X_1 en X_2 onafhankelijke stochasten zijn, beide uniform verdeeld op $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Bepaal de verdelingsfunctie, de kansdichtheid en de verwachtingswaarde van $|X_1 - X_2|$.
- (b) Stel je kiest, toevallig en onafhankelijk, twee punten uit het eenheidsvierkant. Deze punten definiëren samen een rechthoek, zoals in de tekening aangegeven (zie Figuur-1), met oppervlakte $|X_1 - X_2| \cdot |Y_1 - Y_2|$. Bepaal de verwachtingswaarde van de oppervlakte van deze rechthoek.

• **Opgave 5.** Laat X_1, \dots, X_n onafhankelijke stochasten zijn, alle uniform verdeeld op $(0, 2) \subset \mathbb{R}$. Zij $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

- (a) Bepaal $E(S_n)$ en $\text{Var}(S_n)$.
- (b) Toon met behulp van de ongelijkheid van Chebychev aan dat

$$P(280 < S_{300} < 320) \geq 75\%.$$

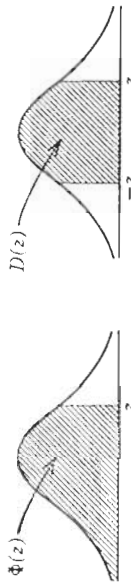
- (c) Geef met behulp van de Centrale Limiet Stelling een benadering voor de kans

$$P(280 < S_{300} < 320)$$

(Gebruik de tabel).

3 Normal Distribution

Table 3a. Distribution Function (3), Sec. 8.2



$D(z) = \Phi(z) - \Phi(-z)$
 $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(0) = 0.5$
 More extended tables: National Bureau of Standards (1953), Hald (1962), Index for further tables: Greenwood and Hartley (1961) (cf. Appendix 3).

z	$\Phi(-z)$		$\Phi(z)$		$D(z)$	
	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.01	4960	5040	0.51	3050	6950	3899
0.02	4920	5080	0.52	3015	6985	3969
0.03	4880	5120	0.53	2981	7019	4039
0.04	4840	5160	0.54	2946	7054	4108
0.05	4801	5199	0.55	2912	7088	4177
0.06	4761	5239	0.56	2877	7123	4245
0.07	4721	5279	0.57	2843	7157	4313
0.08	4681	5319	0.58	2810	7190	4381
0.09	4641	5359	0.59	2776	7224	4448
0.10	4602	5398	0.60	2743	7257	4515
0.11	4562	5438	0.61	2709	7291	4581
0.12	4522	5478	0.62	2676	7324	4647
0.13	4483	5517	0.63	2643	7357	4713
0.14	4443	5557	0.64	2611	7389	4778
0.15	4404	5596	0.65	2578	7422	4843
0.16	4364	5636	0.66	2546	7454	4907
0.17	4325	5675	0.67	2514	7486	4971
0.18	4286	5714	0.68	2483	7517	5035
0.19	4247	5753	0.69	2451	7549	5098
0.20	4207	5793	0.70	2420	7580	5161
0.21	4168	5832	0.71	2389	7611	5223
0.22	4129	5871	0.72	2358	7642	5285
0.23	4090	5910	0.73	2327	7673	5346
0.24	4052	5948	0.74	2296	7704	5407
0.25	4013	5987	0.75	2266	7734	5467
0.26	3974	6026	0.76	2236	7764	5527
0.27	3936	6064	0.77	2206	7794	5587
0.28	3897	6103	0.78	2177	7823	5646
0.29	3859	6141	0.79	2148	7852	5705
0.30	3821	6179	0.80	2119	7881	5763
0.31	3783	6217	0.81	2090	7910	5821
0.32	3745	6255	0.82	2061	7939	5878
0.33	3707	6293	0.83	2033	7967	5935
0.34	3669	6331	0.84	2005	7995	5991
0.35	3632	6368	0.85	1977	8023	6047
0.36	3594	6406	0.86	1949	8051	6102
0.37	3557	6443	0.87	1922	8078	6157
0.38	3520	6480	0.88	1894	8106	6211
0.39	3483	6517	0.89	1867	8133	6265
0.40	3446	6554	0.90	1841	8159	6319
0.41	3409	6591	0.91	1814	8186	6372
0.42	3372	6628	0.92	1788	8212	6424
0.43	3336	6664	0.93	1762	8238	6476
0.44	3300	6700	0.94	1736	8264	6528
0.45	3264	6736	0.95	1711	8289	6579
0.46	3228	6772	0.96	1685	8315	6629
0.47	3192	6808	0.97	1660	8340	6680
0.48	3156	6844	0.98	1635	8365	6729
0.49	3121	6879	0.99	1611	8389	6778
0.50	3085	6915	1.00	1587	8413	6827

z	$\Phi(-z)$		$\Phi(z)$		$D(z)$	
	0.	0.	0.	0.	0.	0.
1.51	7655	9345	0.8690	0.	0.	0.
1.52	6643	9377	8715	0.	9556	9879
1.53	6630	9370	8740	0.	9566	9883
1.54	6618	9362	8764	0.	9576	9886
1.55	6606	9354	8789	0.	9586	9889
1.56	6594	9406	8812	0.	9596	9892
1.57	6582	9418	8836	0.	9606	9895
1.58	6571	9429	8859	0.	9615	9898
1.59	6559	9441	8882	0.	9625	9901
1.60	6548	9452	8904	0.	9634	9904
1.61	6537	9463	8926	0.	9643	9907
1.62	6526	9474	8948	0.	9651	9909
1.63	6516	9484	8969	0.	9660	9912
1.64	6505	9495	8990	0.	9668	9915
1.65	6495	9505	9011	0.	9676	9917
1.66	6485	9515	9031	0.	9684	9920
1.67	6475	9525	9051	0.	9692	9922
1.68	6465	9535	9070	0.	9700	9924
1.69	6455	9545	9090	0.	9707	9926
1.70	6444	9554	9109	0.	9715	9929
1.71	6436	9564	9127	0.	9722	9931
1.72	6427	9573	9146	0.	9729	9933
1.73	6418	9582	9164	0.	9736	9935
1.74	6409	9591	9181	0.	9743	9937
1.75	6401	9599	9199	0.	9750	9939
1.76	6392	9608	9216	0.	9756	9940
1.77	6384	9616	9233	0.	9762	9942
1.78	6375	9625	9249	0.	9768	9944
1.79	6367	9633	9265	0.	9774	9946
1.80	6359	9641	9281	0.	9780	9947
1.81	6351	9649	9297	0.	9786	9949
1.82	6344	9656	9312	0.	9791	9950
1.83	6336	9664	9328	0.	9797	9952
1.84	6329	9671	9342	0.	9802	9953
1.85	6322	9678	9357	0.	9807	9955
1.86	6314	9686	9371	0.	9812	9956
1.87	6307	9693	9385	0.	9817	9958
1.88	6301	9699	9399	0.	9822	9959
1.89	6294	9706	9412	0.	9827	9960
1.90	6287	9713	9426	0.	9832	9961
1.91	6281	9719	9439	0.	9836	9963
1.92	6274	9726	9451	0.	9840	9964
1.93	6268	9732	9464	0.	9845	9965
1.94	6262	9738	9476	0.	9849	9966
1.95	6256	9744	9488	0.	9853	9967
1.96	6250	9750	9500	0.	9857	9968
1.97	6244	9756	9512	0.	9861	9969
1.98	6239	9761	9523	0.	9865	9970
1.99	6233	9767	9534	0.	9869	9971
2.00	6228	9772	9545	0.	9872	9972
				0.	9876	9973